一类三角形几何不等式的统一证法

唐新来

(巢湖市炯炀中学,安徽　238072)

中图分类号: O123.6　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 0488 - 7395(2003)15 - 0029 - 03

我们知道,任何三角形都有一个内切圆,切点把三边分成两段.根据切线长定理,可将三边分拆换元,即在$\triangle ABC$中,a,b,c分别为其三边长,可设

$$a=y+z,\ b=x+z,\ c=x+y\ (\text{其中},x,y,z\in\mathbf{R}_+)\tag{1}$$

如此便可简捷地证明一些三角形不等式.下面我们举例说明:

1　分拆换元后,运用算术—几何平均值不等式

一些结构较复杂,直接运用均值不等式有困难的三角形几何不等式,依据(1)式分拆换元后,却能容易利用算术—几何平均值不等式.

例1　在$\triangle ABC$中,a,b,c分别为其边长,求证:

①(《数学通讯》2001.12.数学问题1324)

$$\frac{a+b}{b+c-a}+\frac{b+c}{c+a-b}+\frac{c+a}{a+b-c}\geq 6.$$

②(《数学教学》2001.5-6.数学问题543)

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\geq 3.$$

③ $\sqrt{\frac{a+b}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b+c}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+b-c}}\geq 3\sqrt{2}$.

④(《数学教学》2001.5-6.数学问题548).

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{a-b+c}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}>2\sqrt{2}.$$

证　由(1)知:

$$\frac{a+b}{b+c-a}+\frac{b+c}{c+a-b}+\frac{c+a}{a+b-c}$$

$$=\frac{x+y+2z}{2x}+\frac{2x+y+z}{2y}+\frac{x+2y+z}{2z}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)$$

$$\geq\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+3=6.$$

即①获证.

同理: $\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}$

$$=\sqrt{\frac{y+z}{2x}}+\sqrt{\frac{x+z}{2y}}+\sqrt{\frac{x+y}{2z}}$$

$$\geq\sqrt{\frac{\sqrt{yz}}{x}}+\sqrt{\frac{\sqrt{xz}}{y}}+\sqrt{\frac{\sqrt{xy}}{z}}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{\sqrt{yz}}{x}\cdot\frac{\sqrt{xz}}{y}\cdot\frac{\sqrt{xy}}{z}}}=3,$$ 故②获证.

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b+c}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+b-c}}$$

$$=\sqrt{\frac{x+y+2z}{2x}}+\sqrt{\frac{2x+y+z}{2y}}+\sqrt{\frac{x+2y+z}{2z}}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(x+y+2z)}{2x}\cdot\frac{(2x+y+z)}{2y}\cdot\frac{(x+2y+z)}{2z}}}$$

$$=3\sqrt[6]{\frac{(2x+y+z)}{2x}\cdot\frac{(x+2y+z)}{2y}\cdot\frac{(x+y+2z)}{2z}}$$

$$=3\sqrt[6]{\left(1+\frac{y+z}{2x}\right)\left(1+\frac{x+z}{2y}\right)\left(1+\frac{x+y}{2z}\right)}$$

$$\geq 3\sqrt[6]{\left(1+\frac{\sqrt{yz}}{x}\right)\left(1+\frac{\sqrt{xz}}{y}\right)\left(1+\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)}$$

$$=3\sqrt[6]{2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{yz}}{x}}\cdot 2\sqrt{\frac{\sqrt{xz}}{y}}\cdot 2\sqrt{\frac{\sqrt{xy}}{z}}}=3\sqrt{2}.$$

亦即③成立.

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{a-b+c}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}$$

$$=\sqrt{\frac{2x}{y+z}}+\sqrt{\frac{2y}{x+z}}+\sqrt{\frac{2z}{x+y}}$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{y}{\sqrt{y(x+z)}}+\frac{z}{\sqrt{z(x+y)}}\right)$$

$$>\sqrt{2}\left(\frac{x}{\frac{x+y+z}{2}}+\frac{y}{\frac{y+x+z}{2}}+\frac{z}{\frac{z+x+y}{2}}\right)$$

(这里显然取不到等号)

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2\sqrt{2}.$$ 故④成立.

2　分拆换元后,利用柯西不等式

由柯西不等式可知: $(b_1+b_2+b_3)\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3}\right)\geq(a_1+a_2+a_3)^2$　(其中 $a_i\in\mathbf{R}$, $b_i\in\mathbf{R}_+$, $i=1,2,3$).

收稿日期:2003 - 02 - 24

作者简介:唐新来(1964—),男,安徽巢湖人,安徽巢湖市炯炀中学一级教师.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

进而我们有：$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$ (2)

例 2 (《中学数学月刊》2000. 12. P40) 在 $\triangle ABC$ 中，有 $\frac{p-b}{b+c}+\frac{p-c}{a+c}+\frac{p-a}{a+b}\geq\frac{3}{4}$，其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

证 由(1)知，$\frac{p-b}{b+c}+\frac{p-c}{a+c}+\frac{p-a}{a+b}$

$$=\frac{y}{2x+y+z}+\frac{z}{x+2y+z}+\frac{x}{x+y+2z}$$

$$=\frac{y^2}{2xy+y^2+zy}+\frac{z^2}{xz+2yz+z^2}+\frac{x^2}{x^2+yx+2zx}$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}\text{（利用(2)）}.$$

因 $\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}$

$$\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4(x+y+z)^2$$

$$\geq 3(x^2+y^2+z^2)+9(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0.$$

而上式成立是显然的，故

$$\frac{p-b}{b+c}+\frac{p-c}{a+c}+\frac{p-a}{a+b}\geq\frac{3}{4}.$$

例 3 (《中等数学》2000.4 数学奥林匹克问题高 115) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，记

$$f(\lambda)=\frac{a}{\lambda a+b+c}+\frac{b}{\lambda b+c+a}+\frac{c}{\lambda c+a+b}.$$

试证：当 $-1<\lambda<1$ 时，有

$$\frac{3}{\lambda+2}\leq f(\lambda)<\frac{2}{\lambda+1} \quad (3)$$

当 $\lambda>1$ 时，有

$$\frac{2}{\lambda+1}<f(\lambda)\leq\frac{3}{\lambda+2} \quad (4)$$

证 由(1)知，$f(\lambda)=\frac{y+z}{(\lambda+1)(y+z)+2x}+\frac{x+z}{(\lambda+1)(x+z)+2y}+\frac{x+y}{(\lambda+1)(x+y)+2z}$.

i) 当 $-1<\lambda<1$，即 $0<\lambda+1<2$ 时，

$$f(\lambda)<\frac{y+z}{(\lambda+1)(y+z+x)}+\frac{x+z}{(\lambda+1)(x+z+y)}+\frac{x+y}{(\lambda+1)(x+y+z)}=\frac{2}{\lambda+1}.$$

且 $f(\lambda)=\frac{(y+z)^2}{(\lambda+1)(y+z)^2+2x(y+z)}$

$$+\frac{(x+z)^2}{(\lambda+1)(x+z)^2+2y(x+z)}+\frac{(x+y)^2}{(\lambda+1)(x+y)^2+2z(x+y)}$$

$$\geq[(2x+2y+2z)^2]/\{(\lambda+1)[(y+z)^2+(x+z)^2+(x+y)^2]+2[x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)]\}$$

$$=\frac{2(x+y+z)^2}{(\lambda+1)(x^2+y^2+z^2)+(\lambda+3)(xy+yz+zx)}.$$

因 $\frac{2(x+y+z)^2}{(\lambda+1)(x^2+y^2+z^2)+(\lambda+3)(xy+yz+zx)}$

$$\geq\frac{3}{\lambda+2}\Leftrightarrow 2(\lambda+2)(x+y+z)^2$$

$$\geq 3(\lambda+1)(x^2+y^2+z^2)+3(\lambda+3)(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow(1-\lambda)(x^2+y^2+z^2)\geq(1-\lambda)(xy+yz+zx).$$

由 $1-\lambda>0$ 及 $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$，知上式成立. 故(3)式得证.

ii) 当 $\lambda>1$ 即 $\lambda+1>2$ 时，

$$f(\lambda)>\frac{y+z}{(\lambda+1)(y+z+x)}+\frac{x+z}{(\lambda+1)(x+z+y)}+\frac{x+y}{(\lambda+1)(x+y+z)}=\frac{2}{\lambda+1},$$

且 $f(\lambda)=\frac{1}{\lambda+1}\left[\frac{(\lambda+1)(y+z)}{(\lambda+1)(y+z)+2x}+\frac{(\lambda+1)(x+z)}{(\lambda+1)(x+z)+2y}+\frac{(\lambda+1)(x+y)}{(\lambda+1)(x+y)+2z}\right]$

$$=\frac{1}{\lambda+1}\{3-2[\frac{x}{(\lambda+1)(y+z)+2x}+\frac{y}{(\lambda+1)(x+z)+2y}+\frac{z}{(\lambda+1)(x+y)+2z}]\}$$

$$=\frac{1}{\lambda+1}\{3-2[\frac{x^2}{(\lambda+1)(y+z)x+2x^2}+\frac{y^2}{(\lambda+1)(x+z)y+2y^2}+\frac{z^2}{(\lambda+1)(x+y)z+2z^2}]\}$$

$$\leq\frac{1}{\lambda+1}\cdot[3-2\cdot\frac{(x+y+z)^2}{2(\lambda+1)(xy+yz+zx)+2(x^2+y^2+z^2)}]$$

$$=\frac{1}{\lambda+1}[3-\frac{(x+y+z)^2}{(\lambda+1)(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2}].$$

因 $\frac{(x+y+z)^2}{(\lambda+1)(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2}$

$$\geq\frac{3}{\lambda+2}\Leftrightarrow(\lambda+2)(x+y+z)^2$$

$$\geq 3(\lambda+1)(xy+yz+zx)+3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow(\lambda-1)(x^2+y^2+z^2)$$

$$\geq(\lambda-1)(xy+yz+zx).$$

由 $\lambda-1>0$ 及 $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$，知上式成立，所以 $f(\lambda)\leq\frac{1}{\lambda+1}(3-\frac{3}{\lambda+2})=\frac{3}{\lambda+2}$. 因此(4)式获证.

评注 分拆换元后，仍难以运用均值不等式时，可将各项的分子、分母同乘以分子，使得各项的分子

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

杨 乐 不 等 式 组

周华生 夏国良
(常熟市中学,江苏 215500)

中图分类号:O122.3 文献标识码:A 文章编号:0488 - 7395(2003)15 - 0031 - 02

用配方法可以很方便地证明杨乐不等式及其许多推广,先看杨乐不等式:

设 $A>0, B>0, A+B\le\pi, 0\le\lambda\le1$,则

$$\cos^2\lambda A+\cos^2\lambda B-2\cos\lambda A\cos\lambda B\cos\lambda\pi\ge\sin^2\lambda\pi.$$

证 左边 - 右边

$$=\cos^2\lambda A+\cos^2\lambda B-2\cos\lambda A\cos\lambda B\cos\lambda\pi-\sin^2\lambda\pi$$

$$=\cos^2\lambda\pi+\cos^2\lambda A\cos^2\lambda B-2\cos\lambda A\cos\lambda B\cos\lambda\pi$$
$$-\cos^2\lambda A\cos^2\lambda B+\cos^2\lambda A-\sin^2\lambda B$$
$$=(\cos\lambda\pi-\cos\lambda A\cos\lambda B)^2+\cos^2\lambda A(1-\cos^2\lambda B)$$
$$-\sin^2\lambda B$$
$$=(\cos\lambda\pi-\cos\lambda A\cos\lambda B)^2-\sin^2\lambda A\sin^2\lambda B$$
$$=[\cos\lambda\pi-\cos\lambda(A+B)][\cos\lambda\pi-\cos\lambda(A-B)].$$

为平方形式.这一步看起来稍稍繁了一些,但在运用不等式(2)后,与要证的目标通过分析法,却能达到出奇制胜的效果.例 3 原题的提供人曾给出了思路隐蔽但富有技巧的一种构造性证明.而本文的证法思路清晰简捷.在本题中若取 $\lambda=0$ 及 2 时,则可得到常见的几何不等式:

$$\frac{3}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2 \quad (5)$$

$$\frac{2}{3}<\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{a+b+2c}\le\frac{3}{4} \quad (6)$$

3 分拆换元后,利用等式替换

例 4 (《数学通报》2000.5 数学问题 1252) 设 a,b,c 是周长为 1 的三角形的三条边长,试证:

$$a^2b+b^2c+c^2a<\frac{1}{8}.$$

证 由(1)及 $x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}$ 可知:

$$a^2b+b^2c+c^2a$$
$$=(y+z)^2(x+z)+(x+z)^2(x+y)$$
$$+(x+y)^2(y+z)$$
$$=(\frac{1}{2}-x)^2(\frac{1}{2}-y)+(\frac{1}{2}-y)^2(\frac{1}{2}-z)$$
$$+(\frac{1}{2}-z)^2(\frac{1}{2}-x)$$
$$=\frac{3}{8}-\frac{3}{4}(x+y+z)+\frac{1}{2}(x+y+z)^2$$
$$-(x^2y+y^2z+z^2x)$$
$$=\frac{1}{8}-(x^2y+y^2z+z^2x)$$

因 $x,y,z\in\mathbf{R}_+$,

所以 $x^2y+y^2z+z^2x>0$,

故 $a^2b+b^2c+c^2a<\frac{1}{8}$.

例 5 在 $\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别为其边长,外接圆和内切圆的半径分别为 R,r,求证:

$$a^2+b^2+c^2\ge4r(4R+r).$$

证 由(1)及三角形中恒等式 $\sum(s-b)(s-c)=r(4R+r)$,知:

$$a^2+b^2+c^2=(y+z)^2+(x+z)^2+(x+y)^2$$
$$\ge4yz+4xz+4xy$$
$$=4(yz+xz+xy)$$
$$=4r(4R+r).$$

故有:$a^2+b^2+c^2\ge4r(4R+r)$.

综上所述,分拆换元是证明一类三角形几何不等式的好方法.它不仅不必考虑三边之间的制约关系,而且思路清晰;其操作程序简言之为"一拆、二靠".即第一步将三边分拆换元,第二步根据换元后的不等式结构,选择最能靠拢目标结论的不等式(如算术—几何平均值不等式,不等式(2),柯西不等式,其它重要不等式等等)来推证,这也是最关键的一步,它需要有敏锐的观察、丰富的联想、灵活的构思、创造性的思维等能力.

收稿日期:2003 - 04 - 02
作者简介:周华生(1943 —),男,江苏常熟人,江苏常熟市中学高级教师,学士.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net